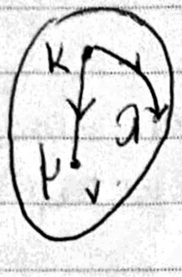
14/11/2016

$E = \{\kappa, \lambda, \mu, \nu\}$

$\sigma. = \{(\kappa,\lambda), (\kappa,\kappa), (\kappa,\mu), (\lambda,\lambda), (\mu,\mu), (\nu,\nu)\}$



Πρόταση

Υπάρχει το πολύ ένα άνω φράγμα α του συνόλου A με $a \in A$.

Απόδειξη

Αν a, b είναι άνω φράγμα του A με $a, b \in A$ τότε

$a \leq b$ (b: άνω φράγμα του A, $a \in A$)

$b \leq a$ (α: " " ", $b \in A$)

Ορισμός

Ένα στοιχείο $a \in A$ καλείται μέγιστο (max) [ελάχιστο (min)] στοιχείο του A αν το a είναι άνω φράγμα του A (max A) (min A)

Παράδειγμα

$\mathbb{R}, \leq$

$A := \{\frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}\} \rightarrow 1 = \max A$ $\left(\frac{1}{\nu} \leq 1 \ \forall \nu \in \mathbb{N}\right)$

και $1 \in A$

$\nexists \min A$ ($\nu_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{\nu_0} \leq \frac{1}{\nu}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ για $\nu = 2\nu_0 \Rightarrow \frac{1}{\nu_0} \leq \frac{1}{2\nu_0} \Rightarrow 2 \leq 1$ άτοπο)

Ορισμός

Ένα στοιχείο $a \in E$ καλείται άνω πέρας (κάτω πέρας) του A $(\sup A)$ $(\inf A)$ αν το a είναι το ελάχιστο (μέγιστο) από τα άνω (κάτω) φράγματα του A

Παράδειγμα

$\mathbb{R}, \leq$

$A := (0,1]$

$a(A)$: το σύνολο των ά.φ. του $(0,1] = A$ $=$

$= [1, +\infty) \Rightarrow \min(a(A)) = 1 \Rightarrow \sup A = 1$

$k(A)$: το σύνολο των κ.φ. του $(0,1) =$

$(-\infty, 0] \Rightarrow \max(k(A)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf A = 0$

$A := \left\{\frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}\right\}$

$a(A)$: το σύνολο των ά.φ. του $\left\{\frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [1, +\infty) \Rightarrow \min(a(A)) = 1 \Rightarrow \sup A = 1$

$k(A)$: το σύνολο των κ.φ. του $\left\{\frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}\right\} = (-\infty, 0] \Rightarrow$

$\Rightarrow \max k(A) = 0 \Rightarrow \inf A = 0.$

$$A : \left\{ \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1} \cdot \nu \ , \ \nu \in \mathbb{N} \right\}$$

$E: \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(E)$, $\subseteq$

$A = \{(1,2), (1), (2), (2,4), \{2,3\}\}$

Το κενό είναι κάτω φράγμα.
$\{1, 2, 3, 4\}$ είναι άνω φράγμα : το μικρότερο.
και το E είναι τ? τ? είναι το μεγαλύτερο

Πρόταση

i) $\sup A \in A \Leftrightarrow \sup A = \max A$

ii) $\inf A \in A \Leftrightarrow \inf A = \min A$

Απόδειξη

i) $(\Rightarrow)$ Έστω ότι $\sup A = a \in A$
τότε το a είναι α.φ. του A.

δηλ. $\left.\begin{array}{l} x \leq a \ , \forall x \in A \\ a \in A \end{array}\right\} \Rightarrow a = \text{maximum}$.

$(\Leftarrow)$ ....

Ορισμός

Ένα στοιχείο $a \in A$ καλείται ψευδομέγιστο (maximal) (ψευδοελάχιστο) (minimal) στοιχείο του A αν δεν υπάρχει $x \in A : a < x$
$(y \in A) : y < b)$

Ισοδύναμα

a: ψευδομέγιστο $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x \in A \\ κ' \\ a \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow a = x$

β: ψευδοελάχιστο $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \in B \\ \text{κ} \\ y \le B \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B = x}$

Πρόταση

Ας είναι $a \in E$ και A το σύνολο όλων των στοιχείων του E που συγκρίνονται με το a. Τότε

i) a: ψευδομέγιστο στοιχείο του $E \Leftrightarrow a = \max A$

ii) a: ψευδοελάχιστο " " " $\Leftrightarrow a = \min A$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το a: ψευδομέγιστο στοιχείο του E.

Προφανώς $a \in A$.

Για $x \in A$ από τον ορισμό του A έπεται ότι το x συγκρίνεται με το a, δηλαδή

$x \le a \lor a \le x$

Αν $a < x$ τότε το a δεν είναι ψευδομέγιστο του A.

Επομένως, $a = x \lor a \le x$ δηλαδή σε κάθε περίπτωση

$$\left.\begin{matrix} x \le a \\ \text{με } a \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \max A$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $a = \max A$. Θα αποδείξω ότι το a: ψευδομέγιστο του E.

δηλ. ότι $\nexists\, x \in E : a < x$

Πράγματι $\exists\, x_0 \in E : a < x_0$ τότε το $x_0 \in A$.

Επίσης $\max A = a$

$\Downarrow$

$x_0 \le a$, άτοπο